

1. Considera $n \geq 3$. Resuelve lo siguiente.

- a) Sea C_n , demuestra que $\gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.
- b) Sea T_n , demuestra que $\gamma(T_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Demostración. Los conjuntos que daremos serán conjuntos dominantes para ciclos y trayectorias, así que probaremos ambos casos al mismo tiempo. Dividamos las gráficas en 3 casos dependiendo de sus vértices módulo 3.

Si $n \equiv 0 \pmod{3}$, es decir, $n = 3k$, propondremos al conjunto

$$I_0 := \{v_2, \dots, v_{3k-1}\}.$$

Notemos que este es un conjunto dominante, ya que

$$I_0^c = \{v_1, \dots, v_{3k-2}\} \cup \{v_3, \dots, v_{3k}\},$$

donde el primer conjunto es dominado ya que, al ser un ciclo, siempre hay una arista de la forma $v_{3j-2}v_{3j-1}$. De manera análoga, los vértices del segundo conjunto son dominados por la arista $v_{3j-1}v_{3j}$.

Si $n \equiv 1 \pmod{3}$, es decir, $n = 3k + 1$, propondremos al conjunto

$$I_1 := \{v_2, \dots, v_{3k-1}, v_n\}.$$

Notemos que este es un conjunto dominante, ya que

$$I_1^c = \{v_1, \dots, v_{3k-2}\} \cup \{v_3, \dots, v_{3k}\},$$

donde el primer conjunto es dominado ya que, al ser un ciclo, siempre hay una arista de la forma $v_{3j-2}v_{3j-1}$. De manera análoga, los vértices del segundo conjunto son dominados por la arista $v_{3j-1}v_{3j}$.

Si $n \equiv 2 \pmod{3}$, es decir, $n = 3k + 2$, propondremos al conjunto

$$I_2 := \{v_2, \dots, v_{3k-1}, v_n\}.$$

Notemos que este es un conjunto dominante, ya que

$$I_2^c = \{v_1, \dots, v_{3k-2}, v_{3k+1}\} \cup \{v_3, \dots, v_{3k}\},$$

donde el primer conjunto es dominado ya que, al ser un ciclo o trayectoria, siempre hay una arista de la forma $v_{3j-2}v_{3j-1}$. De manera análoga, los vértices del segundo conjunto son dominados por la arista $v_{3j-1}v_{3j}$.

Veamos ahora el cardinal de cada uno de estos conjuntos. Para I_0 , notemos que por cada 3 vértices de la gráfica tomamos solo uno, es decir, tiene $\frac{n}{3} = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Para I_1 e I_2 tomamos de nuevo un vértice por cada 3 que tuviera la gráfica más uno extra, por lo que estos conjuntos tienen $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ vértices.

Por lo tanto,

$$\gamma(C_n) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \quad \text{y} \quad \gamma(T_n) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

Para la otra desigualdad, pensemos lo siguiente. Cada v3rtice v de un conjunto dominante cubre $\delta(v) + 1$ v3rtices, pues se cubre a s3 mismo y domina a sus vecinos. Por lo tanto, podemos decir que en general cada v3rtice cubre a lo m3s $\Delta(G) + 1$ v3rtices. Como un conjunto dominante debe cubrir todos los v3rtices de una gr3fica, debemos tener

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta(G) + 1} \right\rceil.$$

En nuestro caso particular sabemos que $\Delta(C_n) = \Delta(T_n) = 2$, por lo que

$$\gamma(C_n) \geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \quad \text{y} \quad \gamma(T_n) \geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

Concluimos que

$$\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \quad \text{y} \quad \gamma(T_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

□

2. Demostrar que si G es una gr3fica desconexa, entonces $\gamma(G^c) \leq 2$.

Demostraci3n. Como G es desconexa, sabemos que tiene al menos 2 componentes conexas ajenas. Sean dos de estas G_1, G_2 y sean $v_1 \in V(G_1)$ y $v_2 \in V(G_2)$. Definiendo las cosas de esta manera, para todo $v \in V(G_1)^c$ se tiene que $vv_1 \notin A(G)$, entonces para todo $v \in V(G_1)^c$ se sigue que $vv_1 \in A(G^c)$. Tambi3n sabemos que para todo $v \in V(G_1)$ se cumple $vv_2 \notin A(G)$ al estar en componentes conexas distintas. De esta manera, para todo $v \in V(G_1)$ se tiene $vv_2 \in A(G^c)$. As3, $\{v_1, v_2\}$ es un conjunto dominante en G^c y su cardinal es 2.

Por lo tanto, $\gamma(G^c) \leq 2$. □

3. Sea G una gr3fica de orden n sin v3rtices aislados, demuestra que $\gamma(G) \leq n - \beta'(G)$.

Demostraci3n. Sea C un $\beta'(G)$ -conjunto. Por definici3n sabemos que todo v3rtice de G es adyacente a al menos una arista de C . Sea

$$C = \{v_{11}v_{12}, \dots, v_{\beta'(G)1}v_{\beta'(G)2}\}.$$

Notemos que

$$V(G) \setminus \{v_{11}, \dots, v_{\beta'(G)1}\}$$

es un conjunto dominante, ya que cada elemento de su complemento

$$\{v_{11}, \dots, v_{\beta'(G)1}\}$$

es dominado por su correspondiente extremo de la arista, a saber, v_{j2} . Además,

$$|V(G) \setminus \{v_{11}, \dots, v_{\beta'(G)1}\}| = |V(G)| - |\{v_{11}, \dots, v_{\beta'(G)1}\}| = n - \beta'(G).$$

Por lo tanto, $\gamma(G) \leq n - \beta'(G)$. $\square$

4. Sea G una gráfica conexa de orden n y $\delta(G) \geq 3$, demuestra que $\gamma(G) \leq n - \lfloor \frac{\text{diam}(G)}{3} \rfloor$.

Demostración. Hagamos un par de demostraciones auxiliares para llegar a este resultado. Primero probemos que

$$\beta'(G) \geq \left\lfloor \frac{\text{diam}(G)}{3} \right\rfloor.$$

Sean $x, y \in V(G)$ tales que $d(x, y) = \text{diam}(G)$.

Si $d(x, y) = \text{diam}(G) = 3k + j$ con $k \geq 0$ y $j \in \{0, 1, 2\}$, entonces es claro que

$$\beta'(G) \geq \left\lfloor \frac{\text{diam}(G)}{3} \right\rfloor,$$

ya que $\beta'(G)$ tiene que ser un entero positivo.

Así, supongamos que $d(x, y) = \text{diam}(G)$ con $k \geq 1$ y $j \in \{0, 1, 2\}$. Notemos que por cada tres aristas que haya en la xy -trayectoria debemos tener que en el $\beta'(G)$ -conjunto hay al menos una arista de esta trayectoria para cubrir todos los vértices. Es decir,

$$\beta'(G) \geq \left\lfloor \frac{\text{diam}(G)}{3} \right\rfloor.$$

Utilizando esta desigualdad tendremos entonces lo siguiente:

$$\beta'(G) \geq \left\lfloor \frac{\text{diam}(G)}{3} \right\rfloor \Rightarrow -\beta'(G) \leq -\left\lfloor \frac{\text{diam}(G)}{3} \right\rfloor \Rightarrow n - \beta'(G) \leq n - \left\lfloor \frac{\text{diam}(G)}{3} \right\rfloor.$$

Además, por el ejercicio anterior sabemos que

$$\gamma(G) \leq n - \beta'(G) \leq n - \left\lfloor \frac{\text{diam}(G)}{3} \right\rfloor.$$

Por lo tanto,

$$\gamma(G) \leq n - \left\lfloor \frac{\text{diam}(G)}{3} \right\rfloor.$$

$\square$

5. a) Demuestra que si G es una gráfica de diámetro 2, entonces $src(G + K_1) \leq src(G)$.
- b) Dar un ejemplo de una gráfica G de diámetro 2 para la cual $src(G + K_1) < src(G)$.
- c) Dar un ejemplo de una gráfica H con diámetro 3 para la cual $rc(H + K_1) < rc(H)$.
- a) *Demostración.* Sea C una $src(G)$ -coloración. Recordemos que $G + K_1$ es la gráfica resultante de unir con aristas todos los vértices de G con los vértices de K_1 , que recordemos es un único vértice. Así, coloreando las aristas de G de la misma manera que C y eligiendo uno de estos colores para todas las aristas entre $V(G)$ y $V(K_1)$, esto también nos arroja una fuerte coloración arcoíris, ya que para cualesquiera dos vértices podemos tener dos casos.
- Si $v, u \in V(G)$, existe una geodésica arcoíris, la misma que ya existía en la coloración original.
- Si $v \in V(G)$ y $u \in V(K_1)$, la arista que los une es la geodésica y, al ser una trayectoria de longitud uno, es una trayectoria arcoíris.
- Por lo tanto, $src(G + K_1) \leq src(G)$. $\square$
- b) Hice el ejemplo en las notas.
- c) Igual en las notas.
6. Considere la gráfica coloreada por aristas de la figura 2. Indica si es posible encontrar un paseo euclidiano cerrado propiamente coloreado. Justifique claramente su respuesta. Si sí se puede, use el algoritmo visto en clase para dar dicho paseo.

Demostración.

$\square$